تكامل الكسور الناطقة

نقصد بالكسر الناطق كسراً بسطه ومقامه كثير حدود، ومكاملة الكسر الناطق يعتمد على تفريقه الى كسور بسيطة من الشكل:

$$\int \frac{A}{(x-a)^n} \qquad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)}$$

حيث n , p عددان صحيحان.
يشترط بالكسر الثاني أن لا يكون للمقام جذور حقيقية.
وقبل مناقشة الحالات نعالج بعض الحالات الخاصة:

1)- $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$

2)- $\int \frac{dx}{x^2+px+q}$ حيث المقام لا يقبل جذور حقيقية في هذه الحالة: نتمم المقام الى مربع كامل وبعد الإصلاح يصبح المقام من الشكل:

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2}$$

مثال: احسب تكامل

$$\int \frac{dx}{x^2-2x+5} \underset{\text{بطريقة الإتمام}}{=} \int \frac{dx}{x^2-2x+1+4} =$$

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2+4} = \frac{1}{2} \arctan \frac{x-1}{2} + c$$

3)- $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx$ حيث المقام لا يقبل جذور حقيقية.

مثال: احسب تكامل $\int \frac{2x+1}{x^2-2x+5}$

$$= \int \frac{2x-2+3}{x^2-2x+5}\,dx = \int \frac{2x-2}{x^2-2x+5}\,dx + \int \frac{3\,dx}{x^2-2x+5}$$

$$\Longrightarrow \ln(x^2-2x+5) + \frac{3}{2}\arctan\frac{x-1}{2} + c$$

4)- إذا كانت قوة البسط أكبر من قوة المقام نقسم البسط على المقام:

مثال: $\int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx$

$$\int \frac{x^4}{x^2+1} = \int \left((x^2-1) + \frac{1}{x^2+1}\right) dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - x + \arctan x + c$$

* تفريق كسر ناطقة إلى مجموعة كسور بسيطة:

1)- إذا كانت عوامل المقام جميعها من الدرجة الأولى وغير مكررة.
في هذه الحالة كل عامل غير مضاعف $(x-a)$ يوافقه كسر بسيط من الشكل:

$$\boxed{\frac{A}{x-a}}$$ حيث A عدد ثابت

2)- إذا كانت عوامل المقام من الدرجة الأولى وبعضها مكرر، في هذه الحالة كل عامل من الدرجة الأولى ومكرر n مرة مثل: $(x-a)^n$ يوافقه مجموعة n كسراً بسيطاً من الشكل:

$$\frac{A_1}{(x-a)^n} + \frac{A_2}{(x-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)}$$

3)- إذا كانت عوامل المقام من الدرجة الثانية وغير مكررة، في هذه الحالة كل عامل من الدرجة الثانية وغير مكرر x^2+px+q يوافقه كسراً بسيطاً من الشكل:

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$$

ملاحظة: «لاحظ»
يمكن أن تكون $A = 0$

4) إذا كانت عوامل المقام من الدرجة الثانية وبعضها مكرر في هذه الحالة كل عامل من الدرجة الثانية ومكرر n مرة مثل $(x^2+px+q)^n$ يوافقه n كسر بسيط من الشكل:

$$\frac{A_1x+B_1}{(x^2+px+q)^n}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^{n-1}}-----+\frac{A_nx+B_n}{x^2+px+q}$$

لتعيين الثوابت في الحالات الأربعة:
نكتب الكسر مساوياً لمجموع الكسور البسيطة الموافقة لكل عامل من عوامل المقام وتوحيد المقام في الطرفين، وحذف المقام ثم إجراء المطابقة بين الطرفين. فينتج لدينا عدد من المعادلات بعدد الحروف الثابتة، بحل هذه المعادلات نحصل على القيم العددية للحروف:

مثال: فرق الكسر التالي إلى مجموعة كسور بسيطة:

$$y=\frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

$$x^2+x-2 \qquad x^2+2x \qquad x^2-x$$

بتوحيد المقامات وحذفها:

$$2x+3=Ax^2+Ax-2A+Bx^2+2Bx+Cx^2-Cx$$

بالمقارنة:

$$A+B+C=0 \Rightarrow B+C=\frac{3}{2}$$

$$A+2B-C=2 \Rightarrow 2B-C=\frac{7}{2}$$

$$-2A=3 \Rightarrow A=\frac{-3}{2}$$

$$3B=5 \Rightarrow B=\frac{5}{3}$$

$$C=\frac{3}{2}-\frac{5}{3}=\frac{9}{6}-\frac{10}{6}=-\frac{1}{6}\Rightarrow$$

(3) (2)

$C=-1$

نعوض القيم في المعادلة:

$$=\frac{-3/2}{x}+\frac{5/3}{x-1}-\frac{1/6}{x+2}$$

$$I=\int\left(\frac{-3/2}{x}+\frac{5/3}{x-1}-\frac{1/6}{x+2}\right)dx=-\frac{3}{2}\ln x+\frac{5}{3}\ln(x-1)-\frac{1}{6}\ln(x+2)+C$$

- $I = \int \frac{dx}{x^2(x-1)}$; $\frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1}$

نوحد المقامات ونختزل:

$1 = Ax - A + Bx^2 - Bx + Cx^2$

بالمقارنة

$B + C = 0$

$A - C = 0$

$-A = 1 \Rightarrow A = -1$

$C = 1 \leftarrow B = -1$ ← نعوض منه

$I = \int \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} \right) dx$

$I = \frac{1}{x} - \ln x + \ln(x-1) + C$

- $I = \int \frac{4}{x^3 + 4x} = \int \frac{4}{x(x^2+4)} dx$

$\frac{4}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2+4}$

(x^2+4) (x) بتوحيد المقامات ونختزلها

$4 = Ax^2 + 4A + Bx^2 + Cx$

$A + B = 0 \Rightarrow B = -1$

$C = 0$

$4A = 4 \Rightarrow A = 1$

★ نضرب بـ 2 ونقسم على 2 ★ $I = \frac{1}{2}\int \left[\frac{1}{x} - \frac{x\cdot 2}{x^2+4} \right] dx$

$= \ln x - \frac{1}{2}\ln|x^2+4| + C$

- $\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\,dx = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^3} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-1}$

$\lim_{x\to 0} \frac{x^3+1}{(x-1)^3} = \lim_{x\to 0} (A+0+0+0) \Rightarrow \boxed{A=-1}$

$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+1}{x(x-1)^3(x-1)} = \lim_{x\to 1} (0+B+0+0) \Rightarrow \boxed{B=2}$

$\Rightarrow C=1 \quad , \quad D=2.$

$\int \left(\frac{-1}{x} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)} \right) dx \quad + c$

$= -\ln x - (x-1)^{-2} - (x-1)^{-1} + 2\ln(x-1) + c$

- $\int \frac{dx}{x^3-1} \Rightarrow \frac{1}{(x-1)(x^2+x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$

نوحد ونختصها

$1 = Ax^2 + Ax + A + Bx^2 + Cx - Bx - C$

$1 = (A+B)x^2 + (A-B+C)x + A - C$

$\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ A-B+C=0 \\ A-C=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{A=\frac{1}{3}},\ \boxed{B=-\frac{1}{3}},\ \boxed{C=\frac{-2}{3}},$

نعوض ونكامل:

$I = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx$

$I = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{6}\int \frac{2x+1+3}{x^2+x+1}\,dx \Rightarrow$

$I = \frac{1}{3}\ln(x-1) - \frac{1}{6}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1}$

$I = \frac{1}{3}\ln(x-1) - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$

RBO HAMAK

$$u = x + \frac{1}{2} \Rightarrow dx = du$$

$$= \frac{1}{3}\ln(x-1) - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{3}\ln(x-1) - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{u}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + c$$

$$= \frac{1}{3}\ln(x-1) - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{(2x+1)}{\sqrt{3}} + c$$

- $\int \frac{dx}{x^2-1} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)}$

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)}$$

بتوحيد المقامات وحذفها:

$$1 = Ax + A + Bx - B$$

$$\left.\begin{matrix} A+B=0 \\ A-B=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \;,\; B = \frac{-1}{2}$$

$$= \int \left(\frac{1/2}{x-1} + \frac{-1/2}{x+1} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln(x+1) + C$$

- $\int \frac{dx}{x^2(1+x)} \Rightarrow \frac{1}{x^2(1+x)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x}$

لتعيين A نضرب ب $(1+x)$ ونجعل $x \to -1$ ⟵ $A = -1$

لتعيين B نضرب ب x^2 ونجعل $x \to 0$ ⟵ $B = 1$

لتعيين C نفرض $x = 1$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + 1 + C$$

$$C = -1$$

$$\int \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right) dx$$

$$= \ln(1+x) - \frac{1}{x} - \ln x + C$$

انتهت المحاضرة